Varianta 012

Subiectul I.

a) $\left|\frac{4+5i}{5+4i}\right|=1$

b) Distanța căutată este $5\sqrt{2}$

c) Ecuația tangentei este: $x-2y+3=0$

d) Punctele L, M, N sunt coliniare, deoarece $\overrightarrow{LN}=2\cdot\overrightarrow{LM}$.

e) $V_{ABCD}=4$.

f) $a=-46$ şi $b=-9$.

Subiectul II.

1.

a) Calcul direct

b) Se foloseşte punctul **a)**.

c) Probabilitatea căutată este $p=1$.

d) $x=1$.

e) $x_1^2+x_2^2+x_3^2=2$.

2.

a) $f'(x)=2^x\ln 2+5^x\ln 5$, pentru $x\in\mathbf{R}$.

b) $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{\ln 2}+\frac{4}{\ln 5}$.

c) $f''(x)>0$, pentru $x\in\mathbf{R}$, deci f este convexă pe $\mathbf{R}$.

d) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=2\ln 2+5\ln 5$.

e) Dreapta $Ox: y=0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul funcției.

Subiectul III.

a) $C+D=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $(C+D)^2=I_2$.

b) $\det(C)=0$, $\operatorname{rang}(C)=1$.

c) Calcul direct.

d) Se demonstrează prin reducere la absurd.

e) Punând în afirmația de la **c)** $x=\det(A+B)$, $y=\det(A-B)$, $a=\det(A)$ şi $b=\det(B)$ şi folosind **d)**, obținem concluzia.

f) Demonstrația este imediată, folosind primul principiu de inducție şi punctul **e)**.

g) Alegem matricele $A_k = \begin{pmatrix} \cos k & -\sin k \\ \sin k & \cos k \end{pmatrix}$, unde $k \in \{1, 2, ..., 10\}$.

Avem $\det(A_k) = 1$, $\forall k \in \{1, 2, ..., 10\}$.

Din **f)** rezultă că există cel puțin o alegere a semnelor pentru care avem:

$\det(A_1 \pm A_2 \pm ... \pm A_{10}) \le \det(A_1) + \det(A_2) + ... + \det(A_{10}) = 10$, de unde obținem concluzia.

Subiectul IV.

a) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$, pentru $x \in (0, \infty)$.

b) $f''(x) < 0$, $\forall x \in (0, \infty)$, deci f' este strict descrescătoare pe $(0, \infty)$.

c) Pentru $k > 0$, aplicând teorema lui Lagrange funcției f pe intervalul $[k, k+1]$, deducem că există $c \in (k, k+1)$ astfel încât $f(k+1) - f(k) = f'(c) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{c}}$.

d) Deoarece f' este strict descrescătoare pe $(0, \infty)$, avem : $k < c < k+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'(k+1) < f'(c) < f'(k) \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt[4]{k+1}} < f(k+1) - f(k) < \dfrac{1}{\sqrt[4]{k}}$, $\forall k > 0$.

e) Pentru $n \in \mathbf{N}^*$, $b_{n+1} - b_n \overset{\mathbf{d)}}{<} 0$, deci șirul $(b_n)_{n\ge1}$ este strict descrescător și

$c_{n+1} - c_n \overset{\mathbf{d)}}{>} 0$, deci șirul $(c_n)_{n\ge1}$ este strict crescător.

f) Deoarece $f'(x) > 0$, $\forall x \in (0, \infty)$, obținem că f este strict crescătoare pe $(0, \infty)$, de unde rezultă că $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $c_n < b_n$.

Folosind monotonia celor două șiruri, deducem $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $c_1 < b_n$ și $c_n < b_1$.

Șirul $(b_n)_{n\ge1}$ este strict descrescător și mărginit inferior, deci este convergent.

Șirul $(c_n)_{n\ge1}$ este strict crescător și mărginit superior, deci este convergent.

g) Deoarece șirul $(b_n)_{n\ge1}$ e convergent, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(b_n + f(n)) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(b_n + \dfrac{4}{3}\cdot n^{\frac{3}{4}}\right) = +\infty$.

h)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n+1}} + \frac{1}{\sqrt[4]{n+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt[4]{2n}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}} = \lim_{n\to\infty}\cdot\frac{a_{2n} - a_n}{\sqrt[4]{n^3}} = \lim_{n\to\infty}\frac{b_{2n} - b_n + (f(2n) - f(n))}{\sqrt[4]{n^3}} =$$

$$= \frac{4}{3}\cdot\left(\sqrt[4]{8} - 1\right).$$